Revista SEMIÁRIDO De Visu
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SERTÃO PERNAMBUCANO

Números Transfinitos e Aritmética Cardinal

Alessandro Mignac Carneiro Leão[1]

[1]Instituto Federal do Sertão Pernambucano – Campus Floresta. Rua Projetada, s/n, Caetano II - Floresta – PE – Brasil. CEP: 56.400-000/ Telefone: (87) 3877-2797 / E-mail: [1]alessandro.mignac@ifsertao-pe.edu.br;

RESUMO: A Teoria dos Conjuntos foi desenvolvida de forma rigorosa e moderna no final do século dezenove por Georg Cantor (1845-1918) para abordar certas questões sutis da teoria das funções. As ideias revolucionárias de Cantor, de início incompreendidas por serem demasiado abstratas para a época, foram rapidamente se impondo como elemento unificador de vários ramos da matemática, a ponto de se tornarem o meio pelo qual é formalizada toda a matemática contemporânea. As aplicações da teoria dos conjuntos à solução de questões relativas à estrutura algébrica de vários tipos de conjuntos e a questões relativas às suas propriedades operatórias abriram novos rumos para os matemáticos. O propósito deste artigo foi promover um estudo dos números transfinitos utilizando a teoria de Cantor, bem como apresentar a chamada aritmética do infinito - aritmética cardinal. Apresentam-se de forma preliminar alguns resultados pertinentes à teoria dos conjuntos e funções, de forma geral.

Palavras-chave: Cantor, Teoria dos Conjuntos, Números Transfinitos, Aritmética Cardinal.

Transfinite Numbers and Cardinal Arithmetic

ABSTRACT: The Set Theory was developed in a rigorous and modern way in the late nineteenth century by Georg Cantor (1845-1918) to address certain subtle questions of function theory. Cantor's revolutionary ideas, at first misunderstood as too abstract for the time, were rapidly imposing themselves as unifying element of various branches of mathematics, to the point of becoming the means by which all contemporary mathematics is formalized. The applications of set theory to the solution of questions concerning the algebraic structure of various types of sets and questions concerning their operative properties opened new paths for mathematicians. The purpose of this article was to promote a study of transfinite numbers using Cantor's theory, as well as to present the arithmetic of infinity - cardinal arithmetic. Preliminary results are presented in the general set theory and functions.

keywords: Cantor, Set Theory, Transfinite Numbers, Cardinal Arithmetic.

(LEÃO, 2017)

Introdução

A moderna teoria matemática dos conjuntos é uma das mais notáveis criações do espírito humano. Devido ao arrojo fora do comum de algumas de suas ideias e devido a alguns dos métodos de demonstração singulares aos quais deu origem, a teoria dos conjuntos é indescritivelmente fascinante. Acima disso, há a enorme importância que a teoria assumiu em praticamente todo o corpo da matemática. Os números cardinais dos conjuntos infinitos recebem o nome de números transfinitos. O desenvolvimento inicial da teoria dos conjuntos foi obra de Georg Cantor (1845 – 1918), numa série de artigos notáveis iniciada em 1874 e publicada, em sua maior parte, nas revistas de matemática alemã *Mathematische Annalen e Journal für Mathematik*.

Cantor então se fazia várias perguntas. Se haviam vários números transfinitos, será que era possível ordená-los? Haveria um infinito maior que todos os outros? Haveria algum número transfinito entre dois supostamente conhecidos? Para tentar responder essas perguntas, Cantor, que era um teórico meticuloso, desenvolve então uma aritmética (aritmética do infinito), isto é, uma extensão, para os números que lhe servem como medida do infinito, das regras de cálculo que se aplicam aos números naturais, usados para medir o que é finito (adição, multiplicação, potenciação). Chamaremos esta aritmética do infinito de aritmética cardinal.

A linguagem dos conjuntos

Os termos elemento e conjunto e a relação de um elemento pertencer a um conjunto são conceitos primitivos, ou seja, não serão definidos. É suficiente afirmar que um conjunto é uma coleção de objetos e estes objetos podem ser chamados de elementos deste conjunto. A afirmação que um elemento x pertence ao conjunto A é simbolizada por $x \in A$ (x pertence a A ou x é um elemento de A) e a sua negação é simbolizada por $x \notin A$ (x não pertence ao conjunto A ou x não é elemento do conjunto A).

Afirmamos que dois conjuntos são considerados iguais se eles têm os mesmos elementos. Mais precisamente, $A = B$ se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A. A condição de que todo elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B estabelece uma relação entre A e B, chamada relação de inclusão. Quando existir uma tal relação entre A e B escreveremos $A \subset B$ ou $B \supset A$, que se lê A está contido em B ou A é subconjunto de B, ou ainda, B contém A.

Um conjunto que não possui elementos é definido como conjunto vazio. Representaremos este conjunto por ϕ. Afirmamos que $\phi \subset A$, para qualquer que seja o conjunto A.

Apresentamos algumas operações envolvendo conjuntos que vão ser instrumentos norteadores para o desenvolvimento do nosso trabalho, a partir de agora a saber:

Dados dois conjuntos A e B, a união de A e B é o conjunto

$$A \cup B = \{x; x \in A \ ou \ x \in B\}$$

e a interseção de A e B é o conjunto

$$A \cap B = \{x; x \in A \ e \ x \in B \}$$

bem como a diferença entre dois conjuntos A e B é dada por

$$A - B = \{x; x \in A \ e \ x \notin B \}.$$

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A e B é o conjunto $A \times B$ de todos os pares ordenados (x, y) de elementos tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente escrevemos:

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \; e \; y \in B\}.$$

Dado um conjunto A qualquer, admitiremos a existência de um conjunto $\wp(A)$, cujos elementos são todos subconjuntos de A, chamado conjunto das partes ou conjunto potência de A.

Dado um conjunto A finito, chamamos de cardinalidade deste conjunto A o número de elementos deste conjunto A e denominaremos por $|A|$.

Dada a cardinalidade, afirmamos que dois conjuntos A e B são ditos equipotentes se $|A| = |B|$ e representaremos que estes conjuntos são equipotentes por $A \sim B$.

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que a cardinalidade de A é menor ou igual a cardinalidade de B quando existe um $C \subseteq B$ (C é um conjunto que está contido em B ou o conjunto C é igual ao conjunto B) tal que C é equipotente a A.

Isto posto, temos que: $|A| \leq |B|$ se, e somente se, existe um $C \subseteq B$ tal que $A \sim C$. Nesse caso, dizemos que também que $|B| \geq |A|$ e que a relação $\geq$ (maior ou igual) é a relação inversa de $\leq$. Naturalmente, se $|B| \leq |A|$ e B não é equipotente a A, então $|B|$ é menor que a cardinalidade de $|A|$e escreve-se $|B| < |A|$ ou ainda $|A| > |B|$. Isso significa que A tem uma quantidade maior de elementos que B.

Sejam dados dois conjuntos não vazios X e Y. Uma função f de X em Y é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. Os conjuntos X e Y são chamados de domínio e contradomínio de f. Denominaremos $X = D(f)$,$Y = CD(f)$ e $f(X)$ como a imagem da função f. Temos que $f(X) \subset Y$. Afirmamos que esta função $f: X \to Y$ é dita:

a) injetiva se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) sobrejetiva se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, $f(X) = Y$.

c) bijetiva se for ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

A composição de funções é definida como se segue: Dadas as funções $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, a função composta de f e g, nessa ordem, é a função $g \circ f: X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. De uma forma geral, basta que tenhamos $f(X) \subset Y$ para que a função $g \circ f$ faça sentido.

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, se existir uma bijeção $f: A \to B$, dizemos que $A \sim B$. (O conjunto A é equipotente ao conjunto B). Isto posto, temos que

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow \text{existe } f: A \to B \text{ bijetiva}$$

Apresentamos agora o importante Teorema de Cantor – Schröeder - Bernstein, assim chamado em homenagem a Georg Cantor, Felix Bernstein e Ernst Schröeder.

Teorema (Cantor – Schröeder – Bernstein).

Dados dois conjuntos A e B, se $|A| \leq |B|$ e também $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$, e, como consequência, $A \sim B$.

Para provar este importante teorema, precisamos apresentar a seguinte proposição:

Proposição 1. Se $B \subset A$ e $|A| \leq |B|$, então $|A| = |B|$, ou seja, se $B \subset A$, existe uma função injetiva $f: A \to B$, então $|A| = |B|$.

Prova (Teorema de Cantor – Schröeder – Bernstein).

(LEÃO, 2017)

Com efeito, tomando as funções injetivas $f: A \to B$ e $g: B \to A$, tem que $f^*: A \to f(A)$, onde $f^*(x) = f(x)$ é uma bijeção entre A e $f(A) \subset B$. Logo, $(f^* \circ g): B \to f(A)$ é uma função injetiva. Como $f(A) \subset B$, temos que $|f(A)| = |B|$ ou, em outras palavras, existe uma função bijetiva $h: f(A) \to B$. Notemos então que $(h \circ f^*): A \to B$ é composição de duas funções bijetivas, logo bijetiva. Isto posto, $A \sim B$.

Em termos da cardinalidade dos dois conjuntos, isso significa que se a cardinalidade de A é menor que a de B e vice-versa, então os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Essa é, obviamente, uma propriedade muito útil para a ordenação de números cardinais.

Um conjunto A é dito finito se for vazio ou existir um número $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \sim I_m = \{1,2,3,4,\cdots,m\}.$$

Um conjunto que não é finito é chamado infinito. Se A for um conjunto finito, o número $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim I_m$ é, como se sabe, o cardinal do conjunto A, que oportunamente denotamos por $|A|$.

> "Cantor mostrou que este conjunto (conjunto dos números racionais) é contável ou enumerável – isto é, pode ser posto em correspondência biunívoca com os números inteiros positivos, portanto tem a mesma potência" (BOYER, 1974)

Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to X$ e, no segundo caso, X é chamado de infinito enumerável.

Seja $\mathbb{P}$ o conjunto dos números naturais pares. Tomemos a bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}, f(n) = 2n$. Ela nos mostra que o conjunto dos números naturais pares é um infinito enumerável. Analogamente, $g: n \to 2n - 1$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números naturais ímpares, o qual é, portanto, um infinito enumerável. Também o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável pois temos que a função $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2n, & n > 0 \\ -2n, & n \leq 0 \end{cases}$$

é uma bijeção. Isto posto, $h^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma enumeração de $\mathbb{Z}$.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ também é enumerável. Para provar esta afirmação, basta tomar o conjunto $\mathbb{Z} \to \{0\}$, que também é enumerável e, consequentemente o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ também é enumerável. Isto posto, a função $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(m,n) = \frac{m}{n}$ é sobrejetiva. Portanto, concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Já o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Um importante resultado no tocante à conjuntos enumeráveis é dado como se segue:

Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ também é enumerável.

Números transfinitos e aritmética cardinal

Cantor chegou a noção de infinito sem considerar diretamente os números, mas sim os conjuntos. Para isso, procurou atribuir tamanhos, que ele chamou de cardinalidade, aos diversos tipos de conjuntos de infinitos elementos. A essas potências deu o nome de números transfinitos.

O primeiro cardinal infinito (transfinito) é o cardinal do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), usualmente denotado por $\aleph_0$. O símbolo é a primeira letra do alfabeto hebraico e chama-se alef. Em geral, denotamos os cardinais transfinitos por $\aleph$ com algum índice. Os cardinais formam uma sequência transfinita iniciada pelos números naturais (que são cardinais) e por $\aleph_0$. A sequência constituída pelos primeiros cardinais tem então o seguinte aspecto:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0$$

Mas a sequência dos cardinais nunca termina, denota o menor cardinal que é maior que, depois denota o menor dos cardinais que é maior que e assim sucessivamente, permitindo avançar na sequência acima para obter

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_n < \cdots$$

Existe um outro tipo de infinito introduzido por Cantor, que deve ser distinguido dos números cardinais, que é o infinito dos números ordinais, que não trataremos aqui.

> "... Cantor finalmente construiu toda uma aritmética transfinita. A "potência" de um conjunto tornou-se o número cardinal do conjunto. Assim, o número do conjunto dos inteiros era o menor número transfinito e o número do conjunto dos números reais ou dois pontos de uma reta é um número maior **c**, o número do contínuo" (BOYER, 1974)

Já existe uma aritmética para números cardinais finitos. Por exemplo, se x e y são números cardinais finitos, a soma $x + y$ e o produto xy têm seus significados tradicionais. Tentaremos agora generalizar estes conceitos de modo a cobrir os números cardinais transfinitos também, ou seja, desenvolver uma aritmética que se aplica a todos os números cardinais, finitos ou transfinitos, que preserve os significados e propriedades tradicionais da aritmética dos números cardinais finitos.

Dados dois cardinais a e b tais que $|A| = a$ e $|B| = b$, temos que a cardinalidade da união destes conjuntos, isto é, $|A \cup B| = a + b$ se $A \cap B \neq \phi$. Esta soma de cardinais é única.

Proposição 2. Para todos os conjuntos A e B, não necessariamente disjuntos, temos que $|A \cup B| \leq |A| + |B|$.

Prova. Se $A \cap B \neq \phi$, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Se $|A \cap B| \neq \phi$, temos que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Logo, temos que $|A \cup B| < |A| + |B|$. Portanto, $|A \cup B| \leq |A| + |B|$.

Proposição 3. (Propriedades Básicas dos Números Cardinais) Dados a, b e c três cardinais quaisquer, temos que:

i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa).

ii) $a + b = b + a$ (comutativa).

iii) Relação de ordem para a adição. $a \geq b \Leftrightarrow$ existe um c tal que $a = b + c$.

iv) Monotonicidade da adição. $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.

Prova.

i) Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$ e $|C| = c$. Temos que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Isto posto, pela definição 5, temos que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

ii) Existem conjuntos A e B tais que $|A| = a$ e $|B| = b$. Temos que $|A \cup B| = a + b$ e $|B \cup A| = b + a$. Mas, sabemos que $A \cup B = B \cup A$. Isto posto, temos que $a + b = b + a$.

iii) Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = a$ e $|B| = b$. Como $a \geq b$, temos que $|B| \leq |A|$. Consideremos um conjunto $X, X \subseteq A$ tal que $|B| = |X|$. Daí, temos $|X| = |B| = b$. Tomemos um conjunto C tal que $C = A - X$ onde $A - X$ é a diferença entre os conjuntos A e X. Logo, temos que $A = X \cup C$ e $X \cap C = \phi$, onde $|A| =$

$|X| + |C|$. Fazendo $|C| = c$, temos que $a = b + c$.

iv) Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ e $|D| = d$. Assumamos que os conjuntos B e D são disjuntos, isto é, $B \cap D = \phi$ e, além disso, $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Temos que $|A| \leq |B|$, o que nos permite afirmar que o conjunto A possui a mesma cardinalidade de algum subconjunto de B. Podemos substituir A por este conjunto, desde que ele possua a mesma cardinalidade de B. Podemos substituir A por este subconjunto, desde que ele possua cardinalidade a . O mesmo se aplica para o conjunto C. Se $A \cap C = \phi$ e $B \cap D = \phi$ temos que $|A \cap C| = a + c$ e $|B \cap D| = b + d$ e se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, onde $A \cup C \subseteq B \cup D$, temos que $a + c \leq b + d$.

Proposição 4. Para todo cardinal finito n, temos que $\aleph_0 + n = \aleph_0$.

Prova. Uma vez que n é finito, temos que $n < \aleph_0$. Portanto, existe um cardinal c tal que $\aleph_0 = n + c$. Logo, $c = \aleph_0$ ou c é um cardinal finito. Se c é um cardinal finito, então $n + c$ é finito, o que contradiz $\aleph_0 = n + c$. Portanto, $c = \aleph_0$ e temos que $n + \aleph_0 = \aleph_0$.

Proposição 5. Para todo cardinal $a \geq \aleph_0$ e para todo cardinal finito n, temos que $a + n = a$. Em particular, temos que $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

Prova. Se $a \geq \aleph_0$, então existe um cardinal c tal que $a = \aleph_0 + c$ e portanto $a + n = (\aleph_0 + c) + n = (c + \aleph_0) + n = c + (\aleph_0 + n) = c + \aleph_0 = a$.

Proposição 6. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Prova. Sejam $\mathbb{N}_p$ e $\mathbb{N}_i$, respectivamente, os conjuntos dos números naturais pares e ímpares. Então, $\mathbb{N}_p$ e $\mathbb{N}_i$ são subconjuntos enumeráveis, disjuntos e a união deles é $\mathbb{N}$. Consequentemente, observamos que $\aleph_0 + \aleph_0 = |\mathbb{N}_p| + |\mathbb{N}_i| = |\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Dados dois cardinais a e b tais que $|A| = a$ e $|B| = b$, temos que $|A \times B| = ab$. Esta multiplicação de cardinais é única.

Proposição 7. (Propriedades Básicas da Multiplicação de Cardinais)

Dados a, b e c três cardinais quaisquer, temos que:

i) $a(bc) = (ab)c$ (associativa).

ii) $ab = ba$ (comutativa).

iii) Distributividade da Multiplicação em Relação à Soma. $a(b + c) = ab + ac$.

iv) Monotonicidade da Multiplicação. $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.

Prova.

i) Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$ e $|C| = c$. Temos que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, temos que $(ab)c = a(bc)$.

ii) Sejam A, B conjuntos tais que $|A| = a$ e $|B| = b$. Como $A \times B \sim B \times A$, temos que $ab = ba$.

iii) Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ e $|D| = d$. Como $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, temos que $(ab)c = a(bc)$.

iv) Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ e $|D| = d$. Assumamos que os conjuntos B e D são disjuntos, isto é, $B \cap D = \phi$ e, além disso, $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Temos que $|A| \leq |B|$, o que nos permite afirmar que o conjunto A possui a mesma cardinalidade de algum subconjunto de B. Podemos substituir A por este conjunto, desde que ele possua a mesma cardinalidade de B. Podemos substituir A por este subconjunto, desde que ele possua cardinalidade a. O mesmo se aplica para o conjunto C. Se $A \cap C = \phi$ e $B \cap D = \phi$ temos que $|A \times C| = ac$ e $|B \times D| = bd$ e se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, onde $A \times C \subseteq B \times D$, temos que $ac \leq bd$.

Proposição 8. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Prova. Lembremos que o produto cartesiano entre dois conjuntos enumeráveis é também enumerável. Diante do exposto, usaremos o fato que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, o que nos leva a concluir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Isto posto, temos que

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Sejam a e b dois números cardinais, finitos ou transfinitos. De modo a dar um significado satisfatório a b^a (leia-se: a-ésima potência de b), examinaremos primeiramente o caso finito:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ e, de modo geral, temos que

$$n^m = n \cdot n \cdot n \cdots n \ (m \text{ fatores}).$$

Poderíamos generalizar este conceito ao caso transfinito, introduzindo produtos cartesianos generalizados, mas existe uma abordagem que funciona sem referência a produtos cartesianos generalizados. Sejam A um conjunto com m elementos e B um conjunto com n elementos. Quantas funções existem de A em B? Da combinatória (precisamente da contagem), temos que cada elemento de A tem n escolhas para sua imagem, e esta escolha da imagem pode ser feita de forma independente m vezes (uma vez para cada elemento de A). Isto posto, temos que a resposta é dada por

$$n^m = n \cdot n \cdot n \cdots n \ (m \text{ fatores}).$$

Este conceito é generalizado como segue:

Dados dois conjuntos A e B, vamos definir $A^B = \{f;\ f: B \to A\}$. Dados dois cardinais a e b tais que $|A| = a$ e $|B| = b$, temos que $|A^B| = a^b$. Esta exponenciação de cardinais é única.

Proposição 9. (Propriedades Básicas da Exponenciação de Cardinais)

i) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

ii) $(a^b)^c = a^{bc}$.

iii) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

iv) $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a^c \leq b^d$.

Prova.

i) Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$ e $B \cap C = \phi$. Sabemos que $|B \cup C| = b + c$. É suficiente mostrar que os conjuntos $A^B \times A^C$ e $A^{B \cup C}$ são equipotentes. Com este propósito, associamos a cada par (f, g) de funções $f \in A^B$ e $g \in A^C$ a função $f \cup g \in A^{B \cup C}$. Esta associação estabelece uma equipotência entre os conjuntos $A^B \times A^C$ e $A^{B \cup C}$. Isto posto, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

ii) Sejam A, B e C conjuntos com cardinais a, b e c, respectivamente. A proposição estará provada se estabelecermos que $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$. Antes de mostrarmos a equipotência, necessitamos, primeiramente, de uma notação convencional: Para uma função dada $f: B \times C \to A$ e um elemento dado $a \in C$, existe uma função $f^a: B \to A$ definida por $f^a(b) = f(b, a)$ para todo $b \in B$. A função g: $A^{B \times C} \to (A^B)^C$, qua associa cada $f \in A^{B \times C}$ a função $h \in (A^B)^C$ dada por $h(a) = f^a$ para todo $a \in C$ é uma bijeção.

iii) Sejam A, B e C conjuntos com cardinais a, b e c, respectivamente. A função $F: (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ que emparelha cada função $f: C \to A \times B$com a função $(f_A \circ f, f_B \circ f)$ em $A^C \times B^C$é bijetiva. Isto posto,$(a^b)^c = a^{bc}$.

iv) Sejam A, B, C e D conjuntos com cardinalidade a, b, c e d, respectivamente, cujas potências são iguais as potências dos seus cardinais. Como $a \leq b$ e $c \leq d$, podemos assumir que $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Logo, temos que $|A^C| = a^c$ e $|B^D| = b^c$. Como $A \subseteq B$, podemos afirmar que $A^C \subseteq B^C$, o que nos dá que $a^c \leq b^c$. Se $c = d$, é imediato que $a^c \leq b^c$. Se $c = d$ é imediato que $a^c \leq b^d$. Se $c \neq d$, como $a \leq b$ e $c \leq d$, temos que $d \geq c$ e,existe um cardinal p tal que $d = c + p$, onde podemos escrever que $b^d = b^c \cdot b^p$, em que $b^d \geq b^c$. Portanto, $a^c \leq b^c$ e $b^c \leq b^d$, o que implica dizer que $a^c \leq b^d$.

Proposição 10. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Prova. Usando o Teorema de Cantor – Schröder – Bernstein é suficiente mostrarmos que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ e $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. Sabemos que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, o que implica dizer que $2^{\aleph_0} = |\wp(\mathbb{Q})|$. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$, definida por $f(a) = \{x \in \mathbb{Q}; x > a\} \subset \mathbb{Q}$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Se a e b são reais distintos, podemos supor que $a < b$. Logo, existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$, o que implica dizer que $r \in f(b)$ e $r \notin f(a)$, o que mostra que $f(a) \neq f(b)$, o que nos mostra que f é uma função injetiva. Isto posto, $\aleph_1 = |\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. Por outro lado, a função $g: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, dada por $g(h) = 0, h(0)h(1)h(2) \cdots \in \mathbb{R}$ é injetiva, o que mostra que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$, como queríamos.

Conclusões

Os assuntos tratados nesse artigo não recebem a devida importância nas licenciaturas, e, dessa forma, difundir o aprendizado por alunos e professores de matemática bem como a todos que se interessarem é o objetivo principal deste artigo. Com este, é possível compreender um pouco mais sobre os números transfinitos e sua aritmética cardinal, compreendendo também que existem vários tipos de infinito. Para chegarmos a tais conclusões, usamos definições, proposições, um verdadeiro passeio por estes resultados tão significativos.

Mencionamos os chamados números ordinais, uma outra classe de números infinitos de Cantor, que serve para assinalar o tamanho dos conjuntos em termos de sua posição em uma sequência, ou seja, quando seus elementos são ordenados, a partir de uma boa ordem (uma ordem tal que todo subconjunto possui um elemento mínimo).

Cantor provou que podem existir infinitos cardinais transfinitos, muito maiores que a cardinalidade dos números reais. Para qualquer conjunto não vazio A,$|A| < |\wp(A)|$, o que nos permite afirmar que $\aleph_1 < |\wp(\mathbb{R})| = \aleph_2$, onde $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$, obtendo assim um novo cardinal transfinito estritamente superior aos anteriores. $\aleph_2$ é o cardinal de, por exemplo, o conjunto de todas as funções reais de variável real. Pelo que foi exposto, podemos construir uma sucessão de cardinais transfinitos $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$

Graças a teoria dos números transfinitos criada por Cantor, podemos dizer que a maioria dos paradoxos que, até então, envolviam o conceito de infinito foram esclarecidos. Outros surgiram, na teoria dos conjuntos, sempre relacionados com o infinito, que só mais tarde foram esclarecidos, com os trabalhos de K. Gödel (1931). Agora podemos, não só contar o infinito como operar com os números transfinitos através da aritmética cardinal.

Referências

ALFONSO, A. B.; NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. **Teoria dos Conjuntos: Sobre a Fundamentação Matemática e a**

(LEÃO, 2017)

Construção de Conjuntos Numéricos, Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna Ltda., 2011.

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**, Segunda Edição, São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, C. B.. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Blucher, 1974.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra, volume 1**, Quarta Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LEVY, A. **Basic Set Theory**, Dover Publications, 2002.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**, New York: Dover Publications, 1977.

HEIN, N.; DADAM, F. **Teoria Unificada dos Conjuntos**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

ROCHA, J. **Treze Viagens pelo Mundo da Matemática**, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 1**, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: introdução à Análise**, Rio de Janeiro: SBM, 2012.